I

Dans tout le problème, n est un entier positif ou nul.

1° On pose, pour tout réel x strictement supérieur à -1 :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^n} \qquad \text{et} \qquad J_n(x) = \int_0^x \frac{t^3\,dt}{(1+t^3)^n}.$$

a. Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

b. Déterminer, pour $n \geqslant 1$, une relation simple entre $I_n(x)$, $J_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.

c. Calculer $J_0(x)$ et $J_1(x)$.

d. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer, pour $n \geqslant 2$, $J_n(x)$ en fonction de $I_{n-1}(x)$; en déduire, pour $n \geqslant 2$, une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.

e. Déterminer les fonctions numériques φ, de la variable réelle x, définies sur $]-1, +\infty[$ et solutions de l'équation différentielle :

$$(1+x^3)^2\,\varphi'(x) - \varphi(x) = 1;$$

pour simplifier l'écriture, on exprimera $\varphi(x)$ en fonction de $I_1(x)$.

2° On pose, sous réserve de la convergence des intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^3\,dt}{(1+t^3)^n}.$$

a. Pour quelles valeurs de n peut-on définir I_n? Calculer alors I_n.

b. Démontrer que I_n tend vers une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

c. Pour quelles valeurs de n peut-on définir J_n? Calculer alors J_n.

d. A l'aide du changement de variable défini par :

$$t^3 = \frac{1-x}{x}, \quad \text{calculer} \int_0^1 \sqrt[3]{x^2(1-x)}\,dx.$$

II

On désigne par E un espace vectoriel sur le corps R des nombres réels. E est muni d'une base (e_1, e_2, e_3).

1° Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice, relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer la dimension et donner une base du noyau de f; qu'en conclure pour f?

b. Soit $V = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ un vecteur de E. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes : « les coordonnées α, β et γ de V dans la base (e_1, e_2, e_3) vérifient la relation : $2\alpha + 2\beta - \gamma = 0$ » et « V appartient à l'image de f ».

2° On considère les vecteurs de E : $v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$ et $v_3 = e_2 + 2e_3$.

a. Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment une base de E.

b. Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont des vecteurs propres de f, en précisant les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 qui leur correspondent.

c. A partir des résultats obtenus en 2° *a.* et 2° *b.* et sans utiliser aucun théorème, démontrer que les seules valeurs propres de f sont λ_1, λ_2 et λ_3 et déterminer l'ensemble des vecteurs propres associés à chacune d'elles.

3° On utilisera ce qui précède pour traiter le plus simplement possible les applications qui suivent.

a. Calculer A^n, où n est un entier strictement positif.

b. Déterminer l'ensemble des vecteurs X de E, s'il en existe, tels que $f(X) = v_2$.

c. Discuter et résoudre, en fonction du paramètre réel p, le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} (-5-p)x - 2y + z = 0 \\ 7x + (4-p)y + z = 0 \\ 4x + 4y + (4-p)z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$